

Aplicații ale calculului variațional. Ecuația Hamilton-Jacobi-Bellman

1 Problema de control optimal

Pentru un sistem descris în spațiul stărilor de:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \text{ cu condițiile inițiale } \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (1)$$

și $t_0 \leq t \leq t_f$, se cere să se determine comanda optimală $\mathbf{u}^*(t)$ pentru care sistemul să urmeze o traiectorie optimală $\mathbf{x}^*(t)$ care să minimizeze funcția de cost

$$J = h(\mathbf{x}(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) dt \quad (2)$$

$\mathbf{x}(t)$ este vectorul de stare, de dimensiune $n \times 1$, iar $\mathbf{u}(t)$ este vectorul intrărilor (comenzilor), de dimensiune $m \times 1$.

2 Condițiile necesare pentru control optimal

Hamiltonianul se definește ca:

$$H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \lambda(t), t) = g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \lambda^T(t) \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) = g + \lambda^T \mathbf{f}$$

unde $\lambda(t)$ este un vector de n funcții de timp, necunoscute, numite *co-stări*.

Indiferent dacă vectorul de intrări $\mathbf{u}(t)$ este sau nu supus unor restricții, Lev Pontryagin a arătat că $\mathbf{u}(t)$ trebuie să minimizeze Hamiltonianul.

Următoarele condiții necesare pentru control optimal pot fi utilizate pentru determinarea soluțiilor candidate ale problemei:

1. Se scrie Hamiltonianul:

$$H(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \lambda(t), t) = g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) + \lambda^T(t) \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) = g + \lambda^T \mathbf{f}$$

și apoi se scriu condițiile necesare:

2. Hamiltonianul trebuie minimizat în raport cu $\mathbf{u}(t)$. Dacă vectorul de intrări nu este restricționat și Hamiltonianul este derivabil de 2 ori în raport cu $\mathbf{u}$, atunci prima derivată în raport cu $\mathbf{u}$ este zero:

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \lambda(t), t) = 0 \quad (3)$$

și a doua derivată trebuie să fie pozitivă. Dacă există restricții asupra vectorului $\mathbf{u}$, atunci minimul Hamiltonianului se determină din analiza problemei.

3. Vectorul de co-stări este dat de:

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \lambda(t), t) \quad (4)$$

4. Ecuația de stare este:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \quad (5)$$

Ecuațiile (4) și (5) formează un set de $2n$ ecuații diferențiale cu $2n$ variabile ($\mathbf{x}(t)_{n \times 1}$ și $\lambda(t)_{n \times 1}$). O soluție unică necesită un set de $2n$ condiții pe frontieră. Acestea se determină conform următoarelor cazuri:

Cazul I. Dacă timpul final t_f este cunoscut și starea finală $\mathbf{x}(t_f)$ este cunoscută.

$$\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f \quad (6)$$

sunt n relații care, împreună cu condițiile inițiale $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ asigură soluția unică a sistemului de ecuații diferențiale (4) și (5).

Cazul II. Dacă timpul final t_f este cunoscut, dar starea finală $\mathbf{x}(t_f)$ este necunoscută. Un set de n condiții finale pentru $\lambda(t)$ se pot determina din:

$$\lambda(t_f) = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(t_f), t_f) \quad (7)$$

Cazul III. Dacă timpul final t_f este necunoscut, dar starea finală $\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{x}_f$ este cunoscută. Atunci:

$$H(\mathbf{x}(t_f), \mathbf{u}(t_f), \lambda(t_f), t_f) + \frac{\partial h}{\partial t}(\mathbf{x}(t_f), t_f) = 0 \quad (8)$$

Cazul IV. Dacă timpul final t_f este necunoscut și starea finală este necunoscută. Atunci condițiile pe frontieră se determină din:

$$\lambda(t_f) = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(t_f), t_f) \quad (9)$$

$$H(\mathbf{x}(t_f), \mathbf{u}(t_f), \lambda(t_f), t_f) + \frac{\partial h}{\partial t}(\mathbf{x}(t_f), t_f) = 0 \quad (10)$$

3 Rezolvarea problemelor utilizând condițiile necesare pentru optimalitate

Dacă stările și comenzile nu sunt supuse restricțiilor, starea finală nu este precizată și timpul final este precizat, atunci se urmează pașii:

1. Se scrie hamiltonianul:

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \lambda) = g(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + \lambda^T(t)\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$

2. Se calculează $\mathbf{u}^*$ care minimizează hamiltonianul:

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = 0, \quad \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{u}^2} > 0$$

În general, $\mathbf{u}^*$ rezultă ca funcție de $\mathbf{x}(t)$, $\lambda(t)$ și t :

$$\mathbf{u}^*(t) = U(\mathbf{x}(t), \lambda(t), t) \quad (11)$$

3. Se determină ecuațiile diferențiale pentru variabilele auxiliare, co-stările $\lambda(t)$:

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \quad (12)$$

4. Se determină condițiile finale pentru λ :

$$\lambda(t_f) = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(t_f)) \quad (13)$$

5. Se înlocuiește $\mathbf{u}^*(t)$ determinat în (11) în sistemul de ecuații de stare:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{U}(\mathbf{x}, \lambda, t), t) \quad (14)$$

6. Se integrează sistemul de ecuații diferențiale pentru λ (12) și sistemul de ecuații de stare (14), cu condițiile inițiale pentru stări $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ și condițiile finale (13) calculate pentru co-stări.

7. Se înlocuiesc expresiile rezultate la pasul anterior în $\mathbf{u}^*(t) = \mathbf{U}(\mathbf{x}(t), \lambda(t), t)$ și se determină comanda optimală.

4 Ecuația Hamilton-Jacobi-Bellman

Pentru problema definită în secțiunea 1, ecuația Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) se obține după cum urmează.

Se notează Hamiltonianul H :

$$H = g(x, u, t) + \frac{\partial J^*(x, t)}{\partial x} f(x, u, t) \quad (15)$$

Ecuația HJB este:

$$0 = \frac{\partial J^*(x, t)}{\partial t} + \min_u H \quad (16)$$

cu condiția pe frontieră:

$$J^*(x(t_f), t_f) = h(x(t_f), t_f) \quad (17)$$

4.1 Rezolvarea unei probleme de control optimal utilizand ecuatia HJB

1. Se calculează expresia hamiltonianului.
2. Se determină $u^*(t)$ care minimizează hamiltonianul
3. Substituind $u^*(t)$ în H se determină $H^* = \min_u H$
4. Se scrie ecuația HJB:

$$H^* + \frac{\partial J^*(x, t)}{\partial t} = 0$$

5. Se scrie condiția finală: $J^*(x(t_f), t_f) = h(x(t_f), t_f)$

6. Se estimează forma lui $J^*(x, t)$, se calculează $J_x^* = \frac{\partial J^*(x, t)}{\partial x}$ și $J_t^* = \frac{\partial J^*(x, t)}{\partial t}$ și se înlocuiesc în ecuația HJB. Estimarea formei lui $J^*(x, t)$ are ca scop transformarea ecuației cu derivate parțiale într-o ecuație diferențială ordinară. Pentru funcții de cost pătratice, se poate folosi de obicei forma: $J^*(x(t), t) = p(t)x^2(t)$
7. Se rezolvă ecuația diferențială ordinară obținută la pasul anterior
8. Se calculează forma finală a lui $u^*(t)$ ca funcție de timp și / sau stări
9. Se integrează ecuația de stare și se determină traiectoria de stare optimă $x^*(t)$.

5 Exerciții

Rezolvați următoarele probleme utilizând:

- Condițiile necesare pentru control optimal și calcul analitic.
- Funcția Matlab *dsolve* pentru integrarea ecuațiilor diferențiale (este necesar *Symbolic Math Toolbox*).

P1. Pentru sistemul dinamic descris de ecuația de stare:

$$\dot{x}(t) = x(t) + u(t), \quad x(0) = 1, \quad t \in [0, 5]$$

se cere să se determine comanda optimală $u^*(t)$ care minimizează funcția de cost:

$$J = \int_0^5 (u^2(t) + x^2(t)) dt$$

Reprezentați grafic $u^*(t)$ și traiectoria de stare optimă $x^*(t)$. Rezolvați problema folosind:

- ecuația Hamilton-Jacobi-Bellman
- principiul minimului

și comparați rezultatele.

P2. Se consideră sistemul mecanic din Figura 1, unde m este masa mașinii, $u(t)$ este o forță externă (semnalul de intrare), $v(t)$ este viteza mașinii (semnalul de ieșire) și b este coeficientul de frecare cu suprafața orizontală.

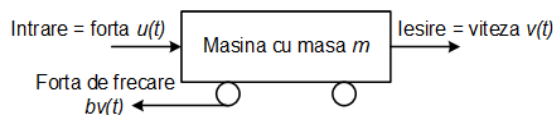


Figura 1: Sistem mecanic

Dacă $v(t)$ este viteza mașinii, prima sa derivată $dv(t)/dt$ este accelerația. Din echilibrul forțelor pe orizontală rezultă următoarea ecuație diferențială:

$$m \frac{dv(t)}{dt} = u(t) - bv(t)$$

Dacă se alege variabila de stare egală cu ieșirea sau viteza mașinii $x(t) = v(t)$, $b = 2$ și $m = 1$, ecuația de stare a acestui sistem se scrie:

$$\dot{x}(t) = -2x(t) + u(t)$$

În momentul inițial se poate considera viteza mașinii egală cu 0:

$$x(0) = 0$$

Problema este determinarea unei comenzi optime $u^*(t)$ care să determine sistemul să urmărească un semnal $\cos t$, într-un interval de timp $t \in [0, 20]$, cu consum minim de energie de comandă.

Funcția de cost care trebuie minimizată va fi:

$$J = \int_0^{20} \left(a_1 \cdot u^2(t) + a_2 \cdot (x(t) - \cos t)^2 \right) dt$$

unde a și b sunt ponderile asociate termenilor din funcția de cost.

Rezolvați problema pentru diferite valori ale lui a și b și comparați rezultatele.

Reprezentați grafic $u^*(t)$. Reprezentați grafic traiectoria de stare optimă $x^*(t)$ pe același grafic cu semnalul de referință $\cos t$.

P3. Pentru sistemul dinamic descris de ecuațiile de stare:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) + u(t)\end{aligned}$$

cu condițiile inițiale $x_1(0) = x_2(0) = 0$, se cere să se determine comanda optimă $u^*(t)$ care minimizează funcția de cost:

$$J = \frac{a}{2}(x_1(2) - 5)^2 + \frac{b}{2}(x_2(2) - 2)^2 + \frac{1}{2} \int_0^2 u^2(t) dt$$

Rezolvați problema pentru diferite valori ale lui a și b și comparați rezultatele. Reprezentați grafic $u^*(t)$ și traiectoriile de stare optime $x_1^*(t)$, $x_2^*(t)$.